tuniTests.tn

نجاحك يهمنا

Correction du DS1

Exercice 1 : 1)V 2)F 3)V 4) F

Exercice 2 :

1)Soit M un point d'affixe z et invariant par f ,f(M) = M sig $z = \frac{z-1+2i}{z-1}$ sig $z(z-1) = z-1+2i$ sig $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$

On a $\Delta = 4.2i = (2(1+i))^2$ et les solutions $z_1 = -i$ et $z_2 = 2+i$ ainsi il y a deux points invariants I(-i) et J(2+i)

2)Soit M≠A , M(z $\xrightarrow{f}$ $M_1(z_1)$ $\xrightarrow{f}$ M'(z') on a $z_1 = \frac{z-1+2i}{z-1}$ et $z' = \frac{z_1-1+2i}{z_1-1}$ d'où $z' = \frac{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1+2i}{\frac{z-1+2i}{z-1} - 1} = \frac{2iz}{2i} = z$

3)a)On a $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où $|z'| = \frac{z-1+2i}{z-1}$ d'ou $OM' = \frac{BM}{AM}$ et ainsi M ∈med [AB] eq OM' =1 eq M' ∈ $\mathcal{C}(O,1)$

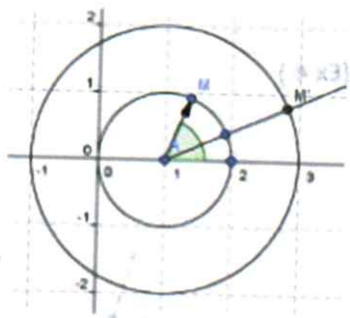
b)on a $z' == \frac{z-1+2i}{z-1}$ d'où arg(z') ≡arg($\frac{z-1+2i}{z-1}$)$[2\pi]$eq $((\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})[2\pi]$

ainsi M∈ C([AB])\{A } eq $((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ \pi]ou\ M = B$ eq $((\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et f(B) =O eq M ∈ $(o,\vec{v})$

4)a)(z'-1)(z-1) =($\frac{z-1+2i}{z-1}$ -1)(z- 1) =2i Ainsi (z'-1)(z-1) =2i

eq $|(z'-1)(z-1)| = |2i|$ et arg((z'-1)(z-1))≡ $\arg(2i)\ [2\pi]$

D'où AM'.AM = 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$



b)M a pour affixe $1 + e^{i\alpha}$ donc $z-1 = e^{i\alpha}$ donc M∈ $\mathcal{C}(A,1)$

d'apres 4)b)AM' = 2 et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]$ d'où la construction de M'

Exercie3 :

1)Soit g(x) = f(x) –x on a g est dérivable sur [-1,1] et g'(x) = f '(x) -1 < 0 car $|f'(x)| < \frac{1}{2}$, $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g(1) = \frac{-1}{2}$

Ainsi $\left\{\begin{array}{l}\text{g est continue sur [-1,1]}\\ \text{g(-1).g(1)<0}\\ \text{g est strictement décroissante sur [-1 ,1]}\end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ l'équation g(x) =0 admet une seule solution α dans [-1 , 1]

2)a)• $pour\ n = 0$,$U_0 = \frac{1}{4}$ ∈ [-1 ,1]

• *On suppose que* U_n ∈[-1,1](pour n ∈ IN) donc f(U_n)∈f([-1,1]) or f([-1,1])= $[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$ C [-1,1] donc f(U_n) ∈[-1,1]

Ainsi U_{n+1} ∈ [-1,1]

b) On a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x ∈ [-1 ,1] $\Longrightarrow$ $f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ $\Longrightarrow$ $U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c)On déduit que pour tout n ,$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{4} - \alpha\right|$ d'où (Un) converge vers 0 (car lim $(\frac{1}{2})^n$ =0)

3)Pour tout n ∈IN et pour tout entier k entre 1 et n on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{n}{n^2}$ et comme f est croissante sur [-1,1]

On déduit que $f(\frac{1}{n^2}) \leq f(\frac{k}{n^2}) \leq f(\frac{1}{n})$ d'où $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$d'où a $nf(\frac{1}{n^2}) < nV_n < nf(\frac{1}{n})$

Et par suite $f(\frac{1}{n^2}) < V_n < f(\frac{1}{n})$. Comme lim $f(\frac{1}{n}) = lim f(\frac{1}{n^2})$ =f (0) = $\frac{1}{4}$ (f est continue en 0)

Exercice 4 :

1)O et D sont symétriques par rapport à (BC) donc J=B * C donc $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ} = 2\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$ donc$A * D = B * O$

2)aOn a AO =CD en effet AO= CO =CD donc il existe un seul déplacement f / f(A) = C et f(O)=D

b)L'angle du déplacement f est $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

donc f est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ Comme BA=BC et ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$) $\equiv$ $\frac{-\pi}{2}$ $[2\pi]$Donc B et le centre de f

c)on a I =B * O *donc* f(I) = f(B) *f(O) = B*D

d)Dans le triangle OBD /(BJ) et (DI) sont deux médianes donc leur point d'intersection N et le centre de gravité de OBD et comme I' =B *D donc O,N et I' sont alignés

3)g(O)=f o R(O)= f(O)=D , g est la composée de deux rotations dont la somme des angles est 0 donc g =$t_{\overrightarrow{OD}}$

4)a)h(D) = S o f^{-1} (D)=S(O)=O et h(C)=Sof^{-1}(C)=A

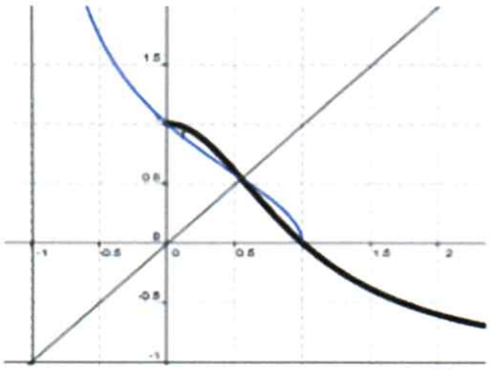
b)med[DO]≠med[CA] donc h est une symétrie glissante d'axe (JO) et de vecteur$\vec{u}$ = $\overrightarrow{Dh(D)}$ = $\overrightarrow{DO}$ (D∈ (JO))

c)h(M) = f^{-1}(M) eq S(f^{-1}(M)) = f^{-1} (M) eq f^{-1}(M) ∈ (AO) eq M ∈ f(AO) eq M ∈(CD)

Exercice 5:

1)f est dérivable sur IR+ et f '(x) = $\frac{-4x}{(x^2+1)^2} > 0$ sur IR*+

f'(x)	-
f	1 ↘ -1



2)f est continue et strictement décroissante sur IR+

Donc elle réalise une bijection de IR+sur f(IR+)=]-1,1]

4)la fonction tangente est continue sur$[0,\frac{\pi}{2}[$ et f est continue sur IR+ donc g=h o tan est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et g est

continue *en*$\frac{\pi}{2}$ *car* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(tanx) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 = g(\frac{\pi}{2})$ *donc g est continue sur*$[0,\frac{\pi}{2})$

b)g(x)= $\frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$ = $\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x+sin^2x}$ = cos(2x) pour tout x≠ $\frac{\pi}{2}$ et cos(2$\frac{\pi}{2}$)=-1 =g($\frac{\pi}{2}$)

c)g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et g'(x)= - 2sin(2x) < 0 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ Donc elle réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur f($[0,\frac{\pi}{2}]$)= [-1,1]

d)g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et g(x)≠ 0pour tout x∈$]0,\frac{\pi}{2}[$ donc g^{-1} est dérivable sur g($]0,\frac{\pi}{2}[$)=]-1,1[

et pour tout x∈]-1,1[]